2Л

УДК 621.391:517.518:510.52

О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, Україна
Україна, 61003, м. Харків, вул. Університетська, 16

Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційовних функцій

O.N. Lytvyn, O.P. Nechuiviter
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy
Ukraine, 61003, Kharkiv, Universytetska St., 16

Calculation of 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions

О.Н. Литвин, О.П. Нечуйвитер
Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков, Украина
Украина, 61003, г. Харьков, ул. Университетская, 16

Приближенное вычисление коэффициентов Фурье функций трех переменных на классе дифференцированных функций

В статье исследуются кубатурные формулы вычисления коэффициентов Фурье функций трех переменных на классе дифференцируемых функций. Информация о функции задана её следами на взаимно-перпендикулярных плоскостях, линиях и значениями функции в узловых точках. Получены оценки погрешности кубатурных формул.
Ключевые слова: коэффициенты Фурье функций трех переменных,
кубатурные формулы, интерфлетация функций.

In the work, cubature formulas of calculation of 3D Fourier coefficients with using spline-interflatation were submitted. Cubature formulas are presented in the case when information about function is set of flats, set of lines and set of knots on one class of differentiable functions. The estimations of error of approaching of the cubature formulas are presented.
Key words: 3 D Fourier coefficients, cubature formulas, interflatation of functions.

У статті досліджуються кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій. Інформація про функцію задана її слідами на взаємно-перпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції у вузлових точках. Отримані оцінки похибки наближення.
Ключові слова: коефіцієнти Фур'є функцій трьох змінних, кубатурні формули,
інтерфлетація функцій.

Вступ

Сучасні задачі цифрової обробки сигналів вимагають розв'язку за допомогою інформаційних операторів різних типів. Це пов'язане з тим, що як дані можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях або площинах, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній або площин, що перетинають

досліджуваний об'єкт. Ефективним у вирішені таких задач став апарат інтерлінації та інтерфлетації функцій [1]. Зокрема, в [2] на класі Ліпшиця був представлений алгоритм побудови кубатурних формул з використанням кусково-сталої інтерфлетації у випадку, коли як дані задані сліди функції на взаємноперпендикулярних площинах. У [3], [4] був викладений загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного і дискретного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій у випадку, коли задані значення функції у вузлах. У [5], [6] наведений алгоритм для отримання більш точної оцінки похибки наближення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами, що у своїй побудові використовують оператори сплайн-інтерфлетації.

Метою даної роботи є представлення та дослідження кубатурних формул наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли як дані задані значення функції у вузлах, сліди функції на взаємноперпендикулярних лініях, на взаємноперпендикулярних лініях площинах на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що $\left|f^{(r,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,r,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,r)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(r,r,0)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(r,0,r)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(0,r,r)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(r,r,r)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$, $r=1,2$.

Для кубатурних формул завжди є актуальним питання їх якості [7]. Тому важливим є питання отримання оцінок похибки наближеного обчислення, зокрема і новими методами. Для досягнення мети поставлена така задача. Побудувати кубатурні формули наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz} dxdydz,$$

на основі сплайн-інтерфлетації функцій у випадку різних інформаційних операторів: при даних – слідах функції на взаємноперпендикулярних площинах, лініях, значеннях функції у вузлах. Отримати оцінку похибки наближення запропонованих кубатурних формул.

1 Оператори сплайн-інтерполяції, сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлетації

Введемо позначення:

$$h_{10}(x)=\begin{cases}\frac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\le x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1,\end{cases}\qquad h_{1\ell}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1},\\ \frac{x-x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1}<x\le x_\ell,\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1},\\ \dfrac{x-x_k}{\Delta}, & x_{k-1}<x<x_k,\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1},\end{cases}\qquad k=\overline{1,\ell-1},\quad x_k=k\Delta,\ \Delta=\frac{1}{\ell},$$

$$\tilde h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\tilde x_1}{-\Delta_1}, & \tilde x_0\le x<\tilde x_1,\\ 0, & x\ge\tilde x_1,\end{cases}\qquad \tilde h_{1\ell^{3/2}}(x)=\begin{cases}0, & x\le\tilde x_{\ell^{3/2}-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & \tilde x_{\ell^{3/2}-1}<x\le\tilde x_{\ell^{3/2}},\end{cases}$$

$$\tilde h_{1\tilde k}(x)=\begin{cases}0, & x\le\tilde x_{\tilde k-1},\\ \dfrac{x-\tilde x_{\tilde k}}{\Delta_1}, & \tilde x_{\tilde k-1}<x<\tilde x_{\tilde k},\\ \dfrac{x-\tilde x_{\tilde k+1}}{-\Delta_1}, & \tilde x_{\tilde k}\le x<\tilde x_{\tilde k+1},\\ 0, & x\ge\tilde x_{\tilde k+1},\end{cases}\qquad \tilde k=\overline{1,\ell^{3/2}-1},\ \tilde x_{\tilde k}=\tilde k\Delta_1,\ \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}},$$

$$\bar h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\bar x_1}{-\Delta_2}, & \bar x_0\le x<\bar x_1,\\ 0, & x\ge\bar x_1,\end{cases}\qquad \bar h_{1\ell^3}(x)=\begin{cases}0, & x\le\bar x_{\ell^3-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta_2}, & \bar x_{\ell^3-1}<x\le\bar x_{\ell^3},\end{cases}$$

$$\bar h_{1\bar k}(x)=\begin{cases}0, & x\le\bar x_{\bar k-1},\\ \dfrac{x-\bar x_{\bar k}}{\Delta_2}, & \bar x_{\bar k-1}<x<\bar x_{\bar k},\\ \dfrac{x-\bar x_{\bar k+1}}{-\Delta_2}, & \bar x_{\bar k}\le x<\bar x_{\bar k+1},\\ 0, & x\ge\bar x_{\bar k+1},\end{cases}\qquad \bar k=\overline{1,\ell^3-1},\quad \bar x_{\bar k}=\bar k\Delta_2,\ \Delta_2=\frac{1}{\ell^3}.$$

Аналогічно визначаються функції

1. $h_{2j}(y),\quad j=\overline{0,\ell},\quad h_{3s}(z),\quad s=\overline{0,\ell},\quad y_j=j\Delta,\ z_s=s\Delta,\quad \Delta=\dfrac{1}{\ell}$;
2. $\tilde h_{2\tilde j}(y)\quad \tilde j=\overline{0,\ell^{3/2}},\ \tilde h_{3\tilde s}(z)\quad \tilde s=\overline{0,\ell^{3/2}},\ \tilde y_{\tilde j}=\tilde j\Delta_1,\ \tilde z_{\tilde s}=\tilde j\Delta_1,\ \Delta_1=\dfrac{1}{\ell^{3/2}}$;
3. $\bar h_{2\bar j}(y)\quad \bar j=\overline{0,\ell^3},\ \bar h_{3\bar s}(z)\ \bar s=\overline{0,\ell^3},\ \bar y_{\bar j}=\bar j\Delta_2,\ \bar z_{\bar s}=\bar s\Delta_2,\quad \Delta_2=\dfrac{1}{\ell^3}$.

Розглянемо оператори:

$$O_1f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\ell}f(x_k,y,z)h_{1k}(x)\ ,\ O_2f(x,y,z)=\sum_{j=0}^{\ell}f(x,y_j,z)h_{2j}(y)\ ,$$

$$O_3f(x,y,z)=\sum_{s=0}^{\ell}f(x,y,z_s)h_{3s}(z),$$

$$\tilde O_1f(x,y,z)=\sum_{\tilde k=0}^{\ell^{3/2}}f(\tilde x_{\tilde k},y,z)h_{1\tilde k}(x)\ ,\ \tilde O_2f(x,y,z)=\sum_{\tilde j=0}^{\ell^{3/2}}f(x,\tilde y_{\tilde j},z)\tilde h_{2\tilde j}(y)\ ,$$

$$\tilde O_3f(x,y,z)=\sum_{\tilde s=0}^{\ell^{3/2}}f(x,y,\tilde z_{\tilde s})\tilde h_{3\tilde s}(z),$$

$$\bar{O}_1 f(x,y,z)=\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3} f(\bar{x}_{\bar{k}},y,z)h_{1\bar{k}}(x)\ ,\ \bar{O}_2 f(x,y,z)=\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3} f(x,\bar{y}_{\bar{j}},z)\bar{h}_{2\bar{j}}(y)\ ,$$

$$\bar{O}_3 f(x,y,z)=\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3} f(x,y,\bar{z}_{\bar{s}})\bar{h}_{3\bar{s}}(z)\,.$$

Означення 1. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на лініях розуміємо

$$f(x_k,y_j,z),\quad 0\le z\le 1,\ f(x_k,y,z_s),\ 0\le y\le 1,\ f(x,y_j,z_s),\ 0\le x\le 1.$$

Означення 2. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на площинах розуміємо

$$f(x_k,y,z),\quad 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1,\ f(x,y_j,z),\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1,\ f(x,y,z_s),\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1.$$

Лема 1. [1] Оператор сплайн-інтерфлетації

$$Of(x,y,z)=O_1 f(x,y,z)+O_2 f(x,y,z)+O_3 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Лема 2. [1] Оператор сплайн-інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації

$$\tilde{O}f(x,y,z)=O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)-$$
$$-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Лема 3. [1] Оператор сплайн-інтерполяції, побудований на основі інтерфлетації

$$\bar{O}f(x,y,z)=O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z)+$$
$$+O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Нехай

$$G_{1k}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_k-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k<\xi<x,\\[2ex] \dfrac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<x_{k+1},\end{cases}$$

$$\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-\tilde{x}_{\tilde{k}}}\dfrac{(\tilde{x}_{\tilde{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \tilde{x}_{\tilde{k}}<\xi<x,\\[2ex] \dfrac{\tilde{x}_{\tilde{k}}-x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-\tilde{x}_{\tilde{k}}}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\tilde{x}_{\tilde{k}+1},\end{cases}$$

$$\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\bar{x}_{\bar{k}+1}-x}{\bar{x}_{\bar{k}+1}-\bar{x}_{\bar{k}}}\dfrac{(\bar{x}_{\bar{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \bar{x}_{\bar{k}}<\xi<x,\\[2ex] \dfrac{\bar{x}_{\bar{k}}-x}{\bar{x}_{\bar{k}+1}-\bar{x}_{\bar{k}}}\dfrac{(\bar{x}_{\bar{k}+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\bar{x}_{\bar{k}+1},\end{cases}$$

а функції $G_{2j}(y,\eta,r)$, $\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)$, $\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)$, $G_{3s}(z,\varsigma,r)$, $\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\varsigma,r)$, $\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\varsigma,r)$, $r=1,2$ визначаються аналогічно.

Лема 4. [1] Справедливі наступні рівності

1. $$f(x,y,z)-Of(x,y,z)=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}} f^{(r,r.r)}(\xi,\eta,\varsigma)G_{1k}(x,\xi,r)G_{2j}(y,\eta,r)G_{3s}(x,\varsigma,r)d\xi d\eta d\zeta;$$

2. $$\left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)=\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}} f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)d\eta d\zeta;$$

3. $$\left(O_1O_2-O_1O_2\bar{O}_3\right)f(x,y,z)=\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}} f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}})\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)d\xi.$$

Лема 5. [8] Справедливі наступні нерівності

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\left|G_1(x,\xi,r)\right|d\xi dx\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},\quad \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\left|G_{2j}(y,\eta,r)\right|d\eta dy\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},$$

$$\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\left|G_{3s}(z,\varsigma,r)\right|d\varsigma dz\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}.$$

2 Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн-інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p),\quad \mu=1,2,3$ пропонуються формули:

$$\Phi_1^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$\Phi_2^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$\Phi_3^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz.$$

Підставимо вираз для оператора сплайн-інтерфлетації та отримаємо відповідні кубатурні формули, наприклад:

$$\Phi_1^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{\ell-1} f(x_k,y,z)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} h_{1k}(x)\sin 2\pi mx dx\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi pz dz+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{\ell-1} f(x,y_j,z)\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} h_{2j}(y)\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi mx dx\sin 2\pi pz dz+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{s=0}^{\ell-1} f(x,y,z_s)\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}} h_{3s}(z)\sin 2\pi pz dz\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi mx dx-$$

$$-\int_0^1 \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1} f(x_k, y_j, z) \int_{x_k}^{x_{k+1}} h_{1k}(x)\sin 2\pi mxdx \int_{y_j}^{y_{j+1}} h_{2j}(y)\sin 2\pi nydy \sin 2\pi pzdz -$$

$$-\int_0^1 \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} f(x_k, y, z_s) \int_{x_k}^{x_{k+1}} h_{1k}(x)\sin 2\pi mxdx \int_{z_s}^{z_{s+1}} h_{3s}(z)\sin 2\pi pzdz \sin 2\pi nydy -$$

$$-\int_0^1 \sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} f(x, y_j, z_s) \int_{y_j}^{y_{j+1}} h_{2j}(y)\sin 2\pi nydy \int_{z_s}^{z_{s+1}} h_{3s}(z)\sin 2\pi pzdz \sin 2\pi mxdx +$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} f(x_k, y_j, z_s) \int_{x_k}^{x_{k+1}} h_{1k}(x)\sin 2\pi mxdx \int_{y_j}^{y_{j+1}} h_{2j}(y)\sin 2\pi nydy \int_{z_s}^{z_{s+1}} h_{3s}(z)\sin 2\pi pzdz \, .$$

Теорема 1. Для кубатурної формули $\Phi_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива така оцінка: $\left|I_1^3(m,n,p) - \bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le \dfrac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3 \ell^{3r}}$.

Доведення. Маємо таку оцінку:

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \Phi_1^3(m,n,p)\right| = \left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(f(x,y,z) - Of(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pzdxdydz\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} \left(f(x,y,z) - Of(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pzdxdydz\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} \left|f^{(r,r.r)}(\xi,\eta,\varsigma)\right| \times$$

$$\times \left|G_{1k}(x,\xi,r)\right|\left|G_{2j}(y,\eta,r)\right|\left|G_{3s}(x,\varsigma,r)\right| d\xi d\eta d\zeta dxdydz \le$$

$$\le \tilde{M} \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!} = \tilde{M}\,\frac{8\Delta^{3r}}{[(r+2)!]^3} = \frac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3 \ell^{3r}}.$$

Теорема доведена.

3 Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн-інтерлінації, побудованих на основі інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu = 1,2,3$ пропонуються формули:

$$\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pzdxdydz \, ,$$

$$\tilde{\Phi}_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pzdxdydz \, ,$$

$$\tilde{\Phi}_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz\,.$$

Теорема 2. Для кубатурної формули $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива така оцінка: $\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\left(\frac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3}+\frac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}$.

Доведення. Оцінимо похибку наближення

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|\le$$

$$=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)-Of(x,y,z)+Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|\le$$

$$\le\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|+\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|dxdydz\,.$$

За теоремою 1 $\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3\,\ell^{3r}}$. Знайдемо оцінку $\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$:

$$\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|Of(x,y,y)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\Big|O_1f(x,y,z)+O_2f(x,y,z)+O_3f(x,y,z)-$$

$$-O_1\tilde{O}_2f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$

$$-O_2\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2f(x,y,z)\Big|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\Big|\left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)+\left(O_2-O_2\tilde{O}_1-O_2\tilde{O}_3+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)+$$

$$+\left(O_3-O_3\tilde{O}_1-O_3\tilde{O}_2+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2\right)f(x,y,z)\Big|dxdydz\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|\left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|\left(O_2-O_2\tilde{O}_1-O_2\tilde{O}_3+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|\left(O_3-O_3\tilde{O}_1-O_3\tilde{O}_2+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\left|f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\right|\left|\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\right|\left|\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\right|d\eta d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\left|f^{(r,0,r)}(\xi,y_j,\zeta)\right|\left|\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)\right|\left|\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\right|d\xi d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\left|f^{(r,r,0)}(\xi,\eta,z_s)\right|\left|\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)\right|\left|\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\right|d\xi d\eta dxdydz\le$$

$$=\bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}+\bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}+\bar{M}\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1^{r+1}}{(r+2)!}=$$

$$=12\bar{M}\frac{\Delta_1^{r}}{(r+2)!}\frac{\Delta_1^{r}}{(r+2)!}=\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\Delta_1^{2r}=\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\left(\frac{1}{\ell^{3/2}}\right)^{2r}=\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Отже, $\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^3\ell^{3r}}+\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\frac{1}{\ell^{3r}}=\left(\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^3}+\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}.$

Теорема доведена.

4 Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн-інтерполяції, побудованих на основі інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ пропонуються формули:

$$\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\bar{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\bar{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\bar{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}\,dxdydz.$$

Теорема 3. Для кубатурної формули $\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива така оцінка:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\left(\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^3}+\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}+\frac{18M}{(r+2)!}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Доведення. Оцінимо похибку наближення $\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|=$$

$$=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(f(x,y,z)-Of(x,y,z)+Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)+\tilde{O}f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|\le$$

$$=\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|+\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|+\left|\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\tilde{O}f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|dxdydz\,.$$

За теоремою 1 та за теоремою 2 маємо:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|+\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\left(\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^3}+\frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}\,.$$

Знайдемо оцінку $\left|\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$:

$$\left|\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(\tilde{O}(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\tilde{O}f(x,y,y)-\bar{O}f(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)++O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+\right.$$

$$+O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)-O_1O_2 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)+$$

$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z)-$$

$$O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z)+$$

$$\left.+O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z)+O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z)+O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1\tilde{O}_3-O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2\tilde{O}_1-O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2\tilde{O}_3-O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3\tilde{O}_1-O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3\tilde{O}_2-O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1O_2-O_1O_2\bar{O}_3\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1O_3-O_1O_3\bar{O}_2\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2O_3-O_2O_3\bar{O}_1\right)f\left(x,y,z\right)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\left|f^{(0,0,r)}(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}},\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right|d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\left|f^{(0,r,0)}(x_k,\eta,\tilde{z}_{\tilde{s}})\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right|d\eta dxdydz+$$

$$+\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\left|f^{(0,0,r)}(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j,\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right|d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{y_j}^{y_j}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}})\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz+$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\left|f^{(0,r,0)}(\tilde{x}_{\tilde{k}},\eta,z_s)\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right|d\eta dxdydz+$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,\tilde{y}_{\tilde{j}},z_s)\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz+$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\left|f^{(0,0,r)}(x_k,y_j,\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right|d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell\ \ -1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\left|f^{(0,r,0)}(x_k,\eta,z_s)\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right|d\eta dxdydz+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{y_j}^{y_j}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,z_s)\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz\le$$

$$=3M\,\ell\Delta\ell^{3/2}\Delta_1\ell^3\frac{2\Delta_2^{\,r+1}}{(r+2)!}+3M\ell\Delta\ell^{3/2}\Delta_1\ell^3\frac{2\Delta_2^{\,r+1}}{(r+2)!}+3M\ell\Delta\ell\Delta\ell^3\frac{2\Delta_2^{\,r+1}}{(r+2)!}=$$

$$=3M\frac{2\Delta_2^{\,r}}{(r+2)!}+3M\frac{2\Delta_2^{\,r}}{(r+2)!}+3M\frac{2\Delta_2^{\,r}}{(r+2)!}=\frac{6}{(r+2)!}\frac{3M}{\ell^{3r}}=\frac{18}{(r+2)!}\frac{M}{\ell^{3r}}.$$

Отже, $\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\left(\frac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3}+\frac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2}+\frac{18M}{(r+2)!}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}$. Теорема доведена.

Висновки

У статті пропонуються та досліджуються кубатурні формули обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн-інтерфлетації на класі функцій, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що $\left|f^{(r,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,r,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,r)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(r,r,0)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(r,0,r)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(0,r,r)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(r,r,r)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$, $r=1,2$. Інформація про функцію задана слідами на системі взаємно-перпендикулярних площин, слідами на системі взаємно-перпендикулярних ліній та значеннями функції у вузлових точках. У всіх випадках отримана оцінка похибки наближення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами.

Тестування та аналіз запропонованих кубатурних формул буде розглянутий у наступних статтях. Питання якості кубатурних формул, тобто чи є побудовані кубатурні формули оптимальними або близькими до них, буде наступним етапом досліджень.

Література

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / Литвин О.М. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
2. Литвин О.М. Потрійні інтеграли від швидкоосцилюючих функцій на класі $C^3_{2,L,L,L}$ та інтерфлетація функцій / О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер // Інформатика та системні науки (ІСН-2010) : матеріали Всеукраїнської конференції, 18 – 20 березня 2010 р. / за ред. д.ф.-м.н, проф. О.О. Ємця. – Полтава : РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 108-110.
3. Литвин О.М. Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є / О.М. Литвин, В.М. Удовиченко // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4 (29). – С. 130-133.
4. Литвин О.М. Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій / О.М. Литвин, В.М. Удовиченко // Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сборник научых тудов. Тематический выпуск : Автоматика и приборостроение. – 2005. – Вып. 38. – С. 90-130.
5. Литвин О.М. Інтерфлетація функцій при розв'язуванні тривимірної задачі теплопровідності / О.М. Литвин, Л.І. Гулік. – Київ : Наукова думка, 2011. – 210 с.
6. Нечуйвітер О.П. Про похибку наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами з використанням інтерполянта, побудованого на основі сплайн-інтерфлетанта / О.П. Нечуйвітер // Праці міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)». – Київ : Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 133.
7. Задирака В.К. Цифровая обработка сигналов / В.К. Задирака, С.С. Мельникова. – Киев : Наукова Думка, 1993. – 294 с.
8. Литвин О.М. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій / О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Збірник наукових праць. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2010. – № 926. – С. 153-160.

Literatura

1. Lytvyn O.M. Interlinacija funkcij ta dejaki ii zastosuvannja. Harkiv: Osnova. 2002. 544 s.
2. Lytvyn O.M., Nechujviter O.P. Informatyka ta systemni nauky (ISN-2010): materialy Vseukrains'koï konferencii 18-20 bereznja 2010r. Poltava: RVV PUSKU. 2010. S. 108-110.
3. Lytvyn O.M. Radiojelektronika i informatika №4(29). 2004. Har'kovskij nacional'nyj universitet radiojelektroniki. S. 130-133.
4. Lyvyn O.M., Udovichenko V.M. Vestnik Nacional'nogo tehnicheskogo universiteta "HPI". Sbornik nauchyh tudov. Tematicheskij vypusk, "Avtomatika i priborostroenie". 38'. 2005, Har'kov. 2005. S. 90-130.

5. Lytvyn O.M., Gulik L.I. Interfletacija funkcij pri rozv'jazuvanni tryvymirnoi zadachi teploprovidnosti. Kiiv.: Naukova dumka. 2011. 210 s.
6. Nechujviter O.P. Praci mizhnarodnoï molodizhnoï matematychnoi shkoly "Pytannja optymizacii obchyslen' (POO-XXXVII)". Kiiv: Instytut kibernetyky imeni V.M. Glushkova NAN Ukraini. 2011. S. 133.
7. Zadiraka V.K., Mel'nikova S.S. Cifrovaja obrabotka signalov. Kiev: Naukova Dumka. 1993. 294 s.
8. Lytvyn O.M., Nechujviter O.P. Visnyk Harkivs'kogo nacionalynogo unyversitetu im. V.N. Karazina. Zbirnyk naukovyh prac'. Serija: "Matematichne modeljuvannja. Informacijni tehnologii. Avtomatizovani sisteme upravlinnja». Harkiv. № 926. 2010. S. 153-160.

O.N. Lytvyn, O.P. Nechuiviter

Calculation of 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions

Modern problems of digital signal processing need the solutions with new forms of data. It means that information about function is set of flats or set of lines or set of knots. The theory of interlineations and interflatation of functions is the most effective in this case.

In the work, cubature formulas of calculation of 3D Fourier coefficients with using spline-interflatation were submitted. Cubature formulas are presented in the case when information about function is set of flats, set of lines and set of knots on one class of differentiable functions. The estimations of error of approaching of the cubature formulas are presented.

Стаття надійшла до редакції 02.11.2011.